第５講　ベクトル

1 ［1］　三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA を $m:n$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．どんな自然数の組 $(m,\ n)$ をとっても AE ⊥ DF となるならば，△ABC はどんな三角形か．

［2］　△OAB において，∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

(1)　P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．

(2)　線分 OQ の長さを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正三角形 ABC に時速 u, v, w で等速運動する 3 点があって，それぞれ A から辺 AB に沿って B へ，B から辺 BC に沿って C へ，C から辺 CA に沿って A へ同時に出発したとする．t 時間後のそれらの位置をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$, $\mathrm{R}(t)$ とする．いずれかの点が次の頂点に到達するまでの間，$\triangle \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(t)$ の重心が動かないための条件を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　四面体 ABCD において，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC が成り立つならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを証明せよ．

［2］　1辺の長さが1の正四面体OABCを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．動点 P は O から A へ辺 OA を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，同時に動き出す．

(1)　動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

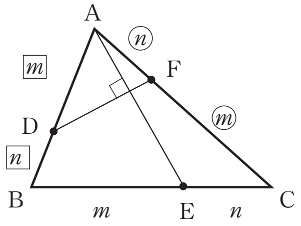
第5講　ベクトル

1　[1]　三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA を $m:n$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．どんな自然数の組 $(m,\ n)$ をとっても AE⊥DF となるならば，△ABC はどんな三角形か．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと

$$\overrightarrow{AE}=\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\qquad \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{n}{m+n}\vec{c}-\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

AE⊥DF より　$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$



$$\left(\frac{1}{m+n}\right)^2(n\vec{b}+m\vec{c})\cdot(n\vec{c}-m\vec{b})=0$$

$$n^2\vec{b}\cdot\vec{c}-mn|\vec{b}|^2+mn|\vec{c}|^2-m^2\vec{b}\cdot\vec{c}=0\quad\cdots\cdots①$$

①が任意の自然数 m，n について成り立つときを考える．

$m=1$，$n=1$ のとき，①は　$\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

ゆえに　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　であることが必要である．

$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ のとき，①は　$n^2\vec{b}\cdot\vec{c}-m^2\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$m=2$，$n=1$　のとき　$3\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　であることが必要である．

逆に，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるとき，①は任意の自然数 m，n で成り立つ．

よって，△ABC は，**∠A＝90°の直角二等辺三角形**である．

1　[2]　△OAB において，∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とする．

(1)　P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．

(2)　線分 OQ の長さを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1)　∠AOP＝∠BOP＝θ とおくと

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta:\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta$$

$$=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=|\vec{a}|:|\vec{b}|$$

(2)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\angle\mathrm{AOP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|$

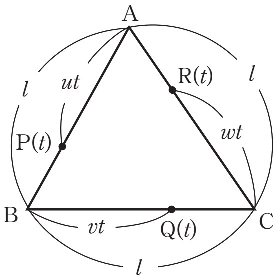
$$\vec{a}\cdot\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right)=|\vec{a}||\overrightarrow{OQ}|\qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{OQ}|=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 正三角形 ABC に時速 u, v, w で等速運動する 3 点があって，それぞれ A から辺 AB に沿って B へ，B から辺 BC に沿って C へ，C から辺 CA に沿って A へ同時に出発したとする．t 時間後のそれらの位置をそれぞれ P(t)，Q(t)，R(t) とする．いずれかの点が次の頂点に到達するまでの間，△P(t) Q(t) R(t) の重心が動かないための条件を求めよ．

△ABC の 1 辺の長さを l とし，△P(t) Q(t) R(t) の重心を G(t) とする．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．



点 P，Q，R のいずれかが次の頂点に達するのにかかる時間を T とすると，$0\leqq t\leqq T$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{ut}{l}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{ut}{l}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{vt}{l}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+\frac{vt}{l}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{wt}{l}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{c}+\frac{wt}{l}(\vec{a}-\vec{c})$$

△PQR の重心 G(t) について

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}(t)}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}+\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}\right)$$

$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\frac{t}{3l}\{u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})\}$$

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とすると，G は△ABC の重心であり，$\overrightarrow{\mathrm{OG}(0)}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ である．

よって，G(t) が動かないための条件は

$\dfrac{t}{3l}\{u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})\}=\vec{0}$ が $0\leqq t\leqq T$ であるすべての t で成り立つことである．

よって　$u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})=\vec{0}$

$$u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+w\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$$

$$(u-v)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(v-w)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より，求める条件は　$\boldsymbol{u=v=w}$

3 ［1］ 四面体 ABCD において，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC が成り立つならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを証明せよ．

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおく．

AB＝CD　より　$|\vec{c}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　……①

AC＝BD　より　$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　……②

AD＝BC　より　$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$　……③

①，②，③を辺々加えて

$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　したがって　$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{c}\neq\vec{a}+\vec{b}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$　　よって　$\angle ADB=\angle ACB<90^\circ$

同様に，$\angle BAC<90^\circ$，$\angle CBA<90^\circ$ より △ABC は鋭角三角形である．

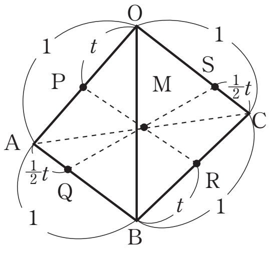
3 ［2］ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．動点 P は O から A へ辺 OA を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す．

(1) 動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ の $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{a}}$　　$\overrightarrow{\mathbf{OQ}}=\left(\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}}\right)\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}}$

$\overrightarrow{\mathbf{OR}}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{c}}$　　$\overrightarrow{\mathbf{OS}}=\left(\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}}\right)\vec{\boldsymbol{c}}$



(2)　M は線分 PR，線分 QS 上にあるので

$\overrightarrow{OM}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OR}=(1-s)t\vec{a}+s(1-t)\vec{b}+st\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=(1-l)\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+(1-l)\frac{t}{2}\vec{b}+l\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$

と表すことができる．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立より

$(1-s)t=(1-l)\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ……①　$s(1-t)=(1-l)\frac{t}{2}$ ……②　$st=l\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ……③

①＋③より　$t=1-\frac{t}{2}$　$\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$　このとき　$s=l=\frac{1}{2}$　よって　$\overrightarrow{\mathbf{OM}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{c}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形 ABC の内部に点 P をとって，AP の中点を M，BM の中点を N とするとき，P が CN の中点となるようにしたい．点 P の位置をどのように定めればよいか．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内に 4 点 P(3, 1, 4)，A(1, 2, 3)，B(1, 1, 2)，C(2, 1, 1) がある．直線 PA，直線 PB，直線 PC と xy 平面の交点をそれぞれ A′, B′, C′ とする．

(1)　△ABC の面積を求めよ．

(2)　△A′B′C′ の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

<u>1</u>　三角形 ABC の内部に点 P をとって，AP の中点を M，BM の中点を N とするとき，P が CN の中点となるようにしたい．点 P の位置をどのように定めればよいか．

解答例

$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表す方針で解答する．**1次独立の２つのベクトルで表す**のが平面ベクトルの基本である．

$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$　より　$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$　……①

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　……②

②に①を代入して

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$\frac{7}{8}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　したがって　$\boxed{\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}}=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

よって，線分 BC を 2：1 に内分する点を Q とすると，線分 AQ を 6：1 に内分する点を P とすればよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標空間内に4点P(3, 1, 4), A(1, 2, 3), B(1, 1, 2), C(2, 1, 1)がある．直線PA，直線PB，直線PCとxy平面の交点をそれぞれA′，B′，C′とする．

(1) △ABCの面積を求めよ．

(2) △A′B′C′の面積を求めよ．

解答例

(1) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$より $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+1+2=3$ 　よって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2\cdot(\sqrt{6})^2-3^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

〔別解〕

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ ← △ABCは二等辺三角形

よって，CAを底辺とした時の△ABCの高さは $\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\overrightarrow{PA'}=k\overrightarrow{PA}$より　$\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OP}=k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\right)$

$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OP}=(3-2k,\ 1+k,\ 4-k)$

A′はxy平面上より　$4-k=0$　$k=4$　よって　A′$(-5,\ 5,\ 0)$

同様に　$\overrightarrow{OB'}=l\overrightarrow{OB}+(1-l)\overrightarrow{OP}=(3-2l,\ 1,\ 4-2l)$

B′はxy平面上より　$4-2l=0$　$l=2$　よって　B′$(-1,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{OC'}=m\overrightarrow{OC}+(1-m)\overrightarrow{OP}=(3-m,\ 1,\ 4-3m)$

C′はxy平面上より　$4-3m=0$　$m=\dfrac{4}{3}$　よって　C′$\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ 0\right)$

線分B′C′はx軸に平行であり，その長さは　$B'C'=\dfrac{8}{3}$

これを△A′B′C′の底辺としたときの高さは4

よって　$\triangle A'B'C'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot4=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}}$

※$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PA}$として直線のベクトル方程式を直接作成してもよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。